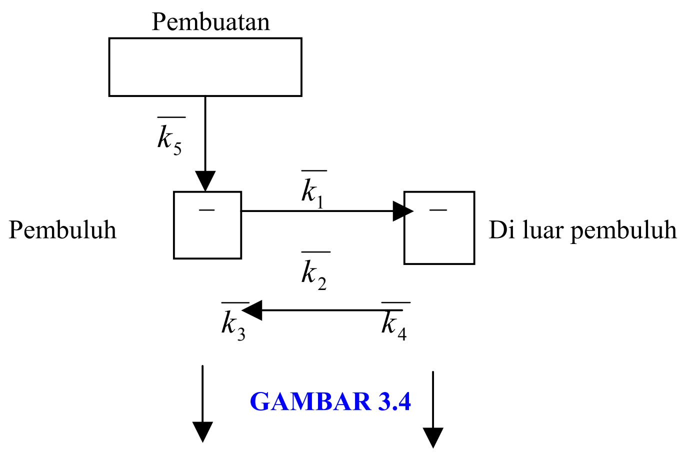
BIOKINETIKA

Pelajaran Albumin Pada Hewan

Beberapa penyelidikan tentang penyebaran, pemecahan, dan pembuatan albumin pada hewan mengantar kepada sistem persamaan diferensial biasa. Pada keadaan normal hewan dianggap mempunyai



GAMBAR 3.4

jumlah albumin yang konstan. Sebagian dari albumin ini terdapat di dalam sistem pembuluh (plasma) dari hewan itu dan sisanya terdapat di dalam cairan- cairan di luar pembuluh (cairan getah bening dan cairan jaringan) (Gambar 3.4). Albumin di dalam plasma (dan di dalam cairan-cairan di luar pembuluh) berubah dengan cara berikut ini. Sebagian albumin dipecah, dan protein yang dikatabolisasikan ini diganti oleh protein yang baru dibuat. Tidak diketahui dengan lengkap dan tepat di mana pemecahan (albumin) itu terjadi, dan karena itu kita anggap bahwa sebagian pemecahan itu terjadi di dalam plasma dan sebagian di dalam cairan-cairan di luar pembuluh. Jadi dalam keadaan alami, penyelidikan tentang albumin dapat ditinjau dari segi model kompartemen seperti pada Gambar 3.4.

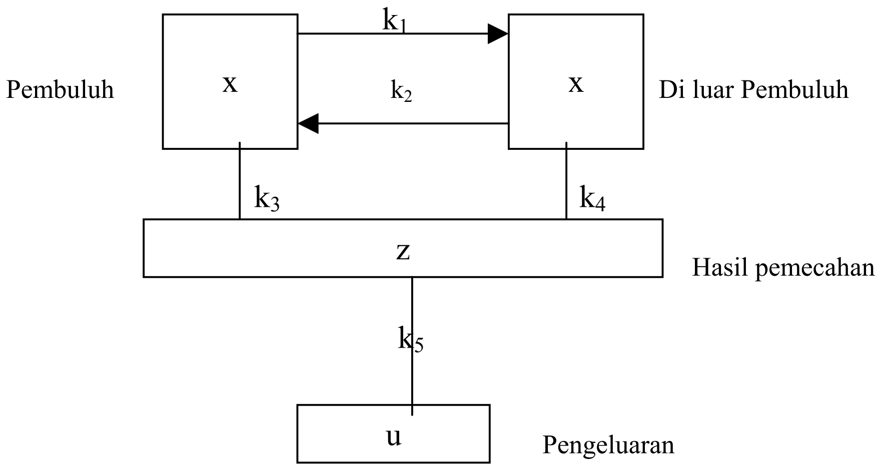
Dalam gambar ini, $\bar{x}$ menyatakan jumlah albumin didalam plasma $\bar{y}$ menyatakan jumlah gram albumin didalam cairan-cairan di luar pembuluh dan $\bar{k}_1, \bar{k}_2, \bar{k}_3, \bar{k}_4 \; dan \, \bar{k}_5$ merupakan konstanta-konstanta yang berkaitan dengan laju dari terjadinya bermacam-macam proses itu. Protein yang baru dibuat terlihat masuk kembali kesistem itu melalui plasma $\bar{k}_3 \; dan \, \bar{k}_4$ berkaitan dengan proses pemecahan, $\bar{k}_1 \; dan \, \bar{k}_2$ dikaitkan dengan laju interaksi. Kita pilih model diatas sebagai model albumin yang tidak dilabel.

Untuk mempelajari proses albumin, beberapa penyelidik bekerja sebagai berikut. Sejumlah tertentu albumin radioaktif, yang dinyatakan sebagai albumin –

I^{131} diperlihatkan dalam Gambar 3.5. Besaran x, y, z dan u dalam gambar menyatakan bagian-bagian dari keseluruhan jumlah asal yang disuntikan . Karena hanya ada satu suntikan, tidak ada protein baru yang dibuat dalam model ini. Proses yang digambarkan pada model kompartemen ini dapat dianalisis dengan mempelajari sistem persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dx}{dt} = k_2 y - (k_1 + k_3)\, x$$
$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - (k_2 + k_4) y$$
$$\frac{dz}{dt} = k_3 x + k_4 y - k_5 z$$
$$\frac{du}{dt} = k_5 z$$

(16)



GAMBAR 3.5

Persamaan pertama diperoleh dengan mencatat dalam model ini bahwa *x* berubah akibat perolehan k_2y g/hari dan kehilangan k_1x dan k_3x g/hari. Persamaan-persamaan yang lain diperoleh berdasarkan alasan yang sama. Sistem ini juga mempunyai syarat awal dan syarat akhir yang berkaitan dengan ini. Mula-mula semua zat radioaktif ada didalam plasma; jadi $t=0 \Rightarrow x=1, y=z=u=0$. Sesudah waktu "takterhingga", semua zat dikeluarkan; jadi, $t \to \infty \Rightarrow x=y=z=0$, u = 1. Penyelesaian sistem ini ditinggalkan untuk latihan. Tetapi, kita ingat, bahwa (16), bersama-sama dengan syarat awalnya., menentukan penyelesaian ini tergantung pada konstanta-konstanta $k_1, \ldots, k_5$. Konstanta-konstanta ini ditentukan secara eksperimen dan oleh syarat akhir.

BIOLOGI

🕮 Fungsi Kelangsungan Hidup Dalam Perkembangan Populasi

✍ *Perkembangan Populasi*

Dalam mempelajari perkembangan populasi dari suatu spesis, kita andalkan ada sejumlah tertentu spesis pada saat $t = 0$, katakan $n(0)$, semua dari umur yang sama. Untuk mudahnya, kita pilih golongan umur ini sebagai umur nol. Pada suatu waktu t masih ada $n_1(t)$ spesis yang masih tinggi dalam populasi itu. Maka $n_1(t)$ dan $n(0)$ dihubungkan, dengan menggunakan *fungsi kelangsungan hidup f(t)* oleh hubungan

$$n_1(t) = n(0)\, f(t).$$

Selanjutnya, kita perhatikan bahwa sejenis dari golongan umur nol yang ditempatkan dalam populasi ini pada suatu saat $t_1 > 0$, yang juga hidup sesuai dengan hokum tersebut diatas. Yaitu, jika $m(t_1)$ dari hewan sejenis itu ditempatkan dalam populasi tadi pada saat t_1, maka pada suatu saat $t > t_1$ kemudian, akan ada $m(t)$ hewan sejenis yang tinggal dalam populasi itu, di mana

$$m(t) = m(t_1)\, f(t - t_1).$$

Sekarang perhatikan hewan sejenis dari golongan umur nol yang ditempatkan dalam populasi pada laju $r(t)$, pada umumnya disebut laju penggantian. Dalam selang waktu dari $\bar{x=\tau}$ ke $x \to 0$, sejumlah $r(\tau_1)\Delta\tau$ hewan sejenis ditempatkan dalam populasi itu. Menurut hokum kelangsungan hidup, pada saat t masih ada sejumlah $r(\tau_1)\Delta\tau$ $f(t - \tau_1)$ dari hewan sejenis itu dal;am populasi tadi.

Peristiwanya sebagai berikut. Pada saat $t = 0$ ada $n(0)$ hewan sejenis dari golongan umur nol dalam suatu sepsis tertentu. Selama waktu itu, hewan sejenis dari golongan umur nol ditempatkan ke dalam populasi dengan laju $r(t)$. Kita ingin menentukan seluruh popluasi $n(t)$ pada saat t kemudian. Tentu saja orang dapat menghampiri jawab untuk $n(t)$ dengan membagi selang waktu $[0,t]$ menjadi selang-selang yang panjangya $\Delta\tau$ dan menambahkan jumlahn yang hidup untuk setiap selang. Wajarlah, hampiran itu akan teliti dengan membuat selang waktu $\overline{y}$ semakin kecil. Jelaslah, kita dapat mengatakan bahwa hampiran itu menjadi $n(t)$ jika $\Delta\tau$ menuju nol. Jadi,

$$\mathrm{n(t) = n(0)f(t)} + \int_0^t r(\tau) + f(t-\tau)\,d\tau \qquad (14)$$

Persamaan (14) merupakan suatu model untuk mempelajari perkembangan populasi yang diatur oleh peristiwa di atas.

<u>CONTOH 2</u>. Andaikan bahwa dalam tahun 1976 ada 34.000 ekor kelinci liar di Rhode Island, yang fungsi kelangsungan hidupnya e^{-t}, dan bahwa kelinci liar itu dimasukkan ke dalam populasi pada laju tetap r_0. Berapa ekor kelinci ada pada saat *t*? Berapa nilai r_0 seharusnya, jika populasi itu konstan?

<u>*Penyelesaian:*</u>

$$
\begin{aligned}
n(t) &= 34.000e^{-t} + \int_0^t r_0 e^{-(t-\tau)} d\tau \\
&= 34.000e^{-t} + r_0 e^{-t} + \int_0^t e^{\tau} d\tau \\
&= 34.000e^{-t} + r_0 e^{-t} + \left(e^{\tau} \Big|_0^t\right) \\
&= 34.000e^{-t} + r_0 (1 - e^{-t})
\end{aligned}
$$

Mudah dilihat bahwa jika r_0 = 34.000, maka n(t) = 34.000 untuk semua t.

<u>CONTOH 3</u> Andaikan bahwa dalam contoh 2 kita ingin menentukan suatu fungsi laju *r(t)* demikian sehingga populasi kelinci liar merupakan suatu fungsi linier dari waktu yaitu :

$$n(t) = n(0) + ct$$

<u>Penyelesaian:</u>

Disini n(0) = 34.000 dan c suatu konstanta . Maka r(t) harus memenuhi

$$n(0) + ct = n(0)\, e^{-t} + \int_0^t r(\tau)\, e^{-(t-\tau)} d\tau \tag{15}$$

Meskipun persamaan (15) bukan suatu persamaan diferensial, pemetaan laplace dapat digunakan disini untuk menentukan fungsi r(t) yang tak diketahui. Dengan mengambil pemetaan laplace dari persamaan (15) kita peroleh :

$$\frac{n(0)}{s} + \frac{c}{s^2} = \left[\frac{n(0)}{s+1} + R(s)\frac{1}{s+1}\right]$$

kita dapatkan R(s) sebagai berikut

$$R(s) = (s+1)\left[\frac{n(0)}{s} + \frac{c}{s^2} - \frac{n(0)}{s+1}\right]$$

Dengan menyederhanakan secara aljabar, kita peroleh

$$
\begin{aligned}
R(s) &= (s+1)\left[\frac{n(0)s(s+1) + c(s+1) - n(0)s^2}{s^2(s+1)}\right] \\
&= \frac{[n(0)+c]s + c}{s^2}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{n(0)+c}{s} + \frac{c}{s^2}$$

kita peroleh fungsi laju dengan mengambil balikan pemetaan laplaca dari R(s)

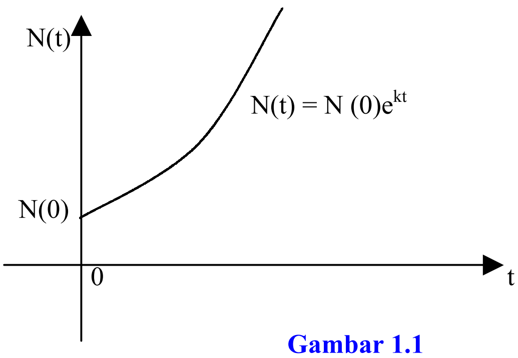
$$r(t) = n(0) + c + ct$$

🕮 Hukum Malthus Tentang Perkembangan Populasi

Telah lama diamati bahwa beberapa koloni bakteri yang besar cenderung berkembang dengan laju yang berbanding lurus dengan jumlah bakteri yang ada. Untuk koloni semacam itu, anmbil $N = N(t)$ sebagai jumlah bakteri yang ada pada setiap saat t. Jika k adalah konstanta perbandingan, maka fungsi $N = N(t)$ memenuhi persamaan diferensial orde satu.

$$N=kN \qquad (7)$$

Persamaan ini disebut *hukum Malthus* mengenai perkembangan populasi. Pada tahun 1798 T.R. Malthus mengamati bahwa penduduk Eropa akan menjadi dua kali lipat. Pada selang waktu yang teratur, dan dengan demikian dia berkesimpulan bahwa laju pertambahan populasi berbanding lurus dengan pnduduk yang ada. Dalam Pers. (7) N berarti dN/dt. (Seperti biasanya, turunan menurut x akan dinyatakn dengan aksen, turunan menurut t dengan titik). Dalam hal ini waktu adalah peubah bebas. Pers (7) adalah suatu persamaan diferensial peubah terpisah dan penyelesaiannya $N(t) = N(0)e^{kt}$ dihitung dalam contoh 3. Pasal 1.3. Di sini $N(0)$ adalah jumlah bakteri pada saat awal, yaitu, pada sat $t = 0$. Penyelesaian $N(t)$ dapat ditunjukkan secara grafik seperti terlihat dalam Gambar 1.1



Gambar 1.1

Perlu ditekankan bahwa Pers. (7) merupakan model matematika yang melukiskan bakteri yang berkembang menurut hukum yang sangat sederhana, bahkan mungkin sangat disederhanakn, yaitu: Bakteri itu berkembang dengan laju yang berbanding lurus dengan banyaknya bakteri yang ada pada setiap saatt. Sebaliknya, pemisalan hokum perkembangan yang sangat sederhana akan menuntun kita kepada suatu persamaan diferensial yang sangat sederhana pula. Penyelesaian Pers. (7), $N(t) = N(0)e^{kt}$, membantu kita memperoleh hampiran kepada ukuran nyata koloni bakteri itu. Jelaslah, model matematik yang lebih realistis untuk perkembangan koloni bakteri ini dapat diperoleh jika kita perhitungkan faktor-faktor realistis, seperti kepadatan, terbatasnya makanan, dan lain-lain. Tentu saja, persamaan difrensialnya menjadi lebih rumit. Dengan sendirinya model matematik yang tidak mungkin diselesaikan secara matematik tidak akan berguna, dan karenanya beberapa hokum penyederhanaan dan perubahan hokum-hukum kehidupan nyata sering kali perlu untuk menurunkan odel matematik yang mudah diselesaikan.

🕮 Interaksi Populasi

Perhatikan dua spesis dan andaikan salah satu dari spesis itu, disebut mangsa, mempunyai persediaan makanan berlebihan sedang spesis lainnya disebut pemangsa., diberi makan oleh spesis yang pertama. Kajian matematis mengenai ekosistem semacam itu diperkenalkan Lotka dan Volterra dalam pertengahan tahun 1920 secara terpisah. Misalkan $x(t)$ dan $y(t)$ masing-masing menyatakan banyaknya spesis mangsa dan pemangsa pada saat t.

Jika kedua spesis terpisah satu sama lain, mereka akan berubah dengan laju berbanding lurus dengan jumlah yang ada,

$$x = ax \qquad \text{dan} \qquad y = -cy \tag{1}$$

Dalam Persamaan (1), $a > 0$ karena populasi mangsa mempunyai persediaan makanan berlebihan dan karena itu bertambah banyak, sedang $-c < 0$ karena populasi pemangsa tidak mempunyai makanan, jadi berkurang jumlahnya.

Tetapi telah kita misalkan bahwa kedua populasi berinteraksi sedemikian sehingga populasi pemangsa makan populsi mangsa. Beralasanlah untuk mengandaikan bahwa jumlah yang membunuh besarnya tiap satuan waktu berbanding lurus dengan x dan y, yaitu xy. Jadi populasi mangsa akan berkurang jumlahnya sedang pemangsa akan bertambah jumlahnya pada laju yang berbanding lurus dengan xy. Jadi, kedua populasi yang berinteraksi memenuhi sistem taklinear

$$x = ax - bxy, \quad y = -cy + dxy \tag{2}$$

dengan b dan d konstanta positif.

Meskipun sistem (2) taklinear dan tidak ada cara yang diketahui untuk menyelesaikan secara eksplisit, meskipun demikian dimungkinkan, dengan menggunakan teori kualitatif mengenai sistem semacam itu, untuk memperoleh banyak sifat dari penyelesaian sistem tersebut, dan pada gilirannya membuat ramalan yang berguna tentang kelakuan kedua spesis itu.

Dengan menyelesaikan sistem persamaan bersama $ax - bxy = 0$ dan $-cy + dxy = 0$, kita dapatkan titik kritis (0,0) dan ($c/d, a/b$) dari sitem (2). Jadi, sistem (2) mempunyai dua penyelesaian yang seimbang $x(t) = 0, y(t) = 0$ dan $x(t) = c/d$, $y(t) = a/b$. Tentu saja, hanya penyelesaian yang kedua yang menarik dalam penerapan.

Akan kita hitung trayektori dari penyelesaian dari(2). Jelaslah, $x(t) = 0$, $y(t) = y(0)e^{-ct}$ merupakan suatu penyelesaian dari (2) dengan trayektori sumbu y positif. Juga $y(t) = 0$, $x(t) = x(0)e^{at}$ adalah penyelesaian dari (2) yang lain, dengan trayektori sumbu x positif. Karena ketunggalan dari penyelesaian, maka setiap penyelesai dari (2) yang pada $t = 0$ berawal pada kuadran pertama tidak dapat memotong sumbu x atau sumbu y, dan karena itu akan selalu tetap berada di kuadran pertama. Trayektori yang ada dari penyelesaian (2) memenuhi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-cy + dxy}{ax - bxy} = \frac{(-c + dx)y}{(a - by)x}$$

yang merupakan persamaan diferensial terpisah. Dengan memisahkan peubah x dan y, kita peroleh

$$\frac{a - by}{y}dy = \frac{-c + dx}{x}dx$$

atau

$$\left(\frac{a}{y} - b\right)dy = \left(-\frac{c}{x} + d\right)dx \qquad (3)$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas dari (3),kita peroleh penyelesaian umum dari (3)

$$a \ln y - by = -c \ln x + dx + k \qquad (4)$$

dimana k adalah konstanta sebarang. Persamaan (4) dapat ditulis kembali sebagai berikut :

$$\ln y^a + \ln x^c = by + dx + k$$

$$\Rightarrow \ln y^a x^c = by + dx + k$$

$$\Rightarrow \quad y^a x^c = e^{by-dx-k}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{y^a}{e^{by}} \cdot \frac{x^c}{e^{dx}} = K$$

(5)

dengan K adalah e^k. Jika kita ambil K sama dengan nol, Persamaan (5) memberikan semua trayektori dari sistem (2).

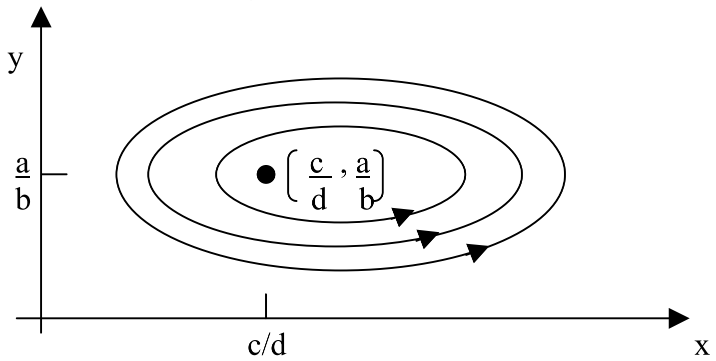
Dapat diperlihatkan bahwa untuk setiap K > 0, trayektori (5) merupakan kurva tertutup, dan karena ini tiap penyelesaian ($x(t)$, $y(t)$) dari (2) dengan nilai awal ($x(0)$, $y(0)$) di dalam kuadran pertama merupakan fungsi dari waktu yang periodic (lihat Gambar 8.11). Jika T merupakan periode dari penyelesaian ($x(t)$,

$y(t)$), yaitu ($x(t+T)$, $y(t+T)$) = ($x(t)$, $y(t)$) untuk semua $t \geq 0$, maka nilai rata-rata dari populasi *x(t)* dan *y(t)*, dengan definisi, diberikan oleh integral

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \ , \ \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt.$$

Sangat mengherankan, nilai rata-rata itu dapat dihitung langsung dari sistem (2) tanpa mengetahui penyelesaian dan periodenya secara eksplisit. Nyatakanlah dari persamaan kedua dalam (2), kita peroleh

$$\frac{y}{y} = -c + dx$$



GAMBAR 8.11

Dengan memngintegralkan kedua ruas dari 0 sampai T, kita dapatkan bahwa

$$\text{Ln } y(T) - \ln y(0) = -cT + d\int_0^T x(t)dt$$

Karena y(T) = y(0), maka

$$-cT + d\int_0^T x(t)dt = 0 \quad \text{atau} \quad \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{c}{d}$$

Karena itu,

$$\bar{x} = \frac{c}{d}$$

(6)

Dengan cara yang sama, dari persamaan pertama dalam (2), kita peroleh

$$\frac{x}{x} = a - by$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas dari 0 sampai T dan menggunakan fakta bahwa *x(T) = x(0)*, kita dapatkan

$$\bar{y} = \frac{a}{b} \qquad (7)$$

Dari (6) dan (7) kita dapat membuat ramalan yang menarik bahwa ukuran rata-rata dari dua populasi *x(t)* dan *y(t)* yang berinteraksi sesuai dengan model matematis yang digambarkan oleh sistem (2) akan tepat mempunyai nilai setimbang *x = c/d* dan *y = a/b*.

Kita dapat menggunakan pengamatan ini untuk membuat ramalan nilai yang menarik. Sebagai tambahan pada hipotesis mengenai populasi mangsa dan populasi pemakan mangsa yang membawa ke model matematis yang digambarkan oleh sistem (2), andaikan bahwa populasi mangsa *x(t)* berkurang dalam "jumlah yangsedang". Maka kedua populasi mangsa dan pemangsa berturut-turut akan berkurang jumlahnya pada laju, katakanlah, $\varepsilon\, x(t)\, dan\, \varepsilon\, y(t)$. Dalam hal ini, sistem (2) akan diganti oleh

$$x = ax - bxy - \varepsilon\, x, \quad y = -cy + dxy - \varepsilon\, y$$

atau (8)

$$x = (a - \varepsilon)x - bxy \quad y = -(c + \varepsilon)y + dxy$$

Dengan menerapkan persamaan (6) dan (7) pada sistem (8), dengan heran, kita simpulkan bahwa jika pengurangan dari mangsa demikian sehingga ukuran rata-rata dari populasi mangsa akan menjadi

$$\bar{x} = \frac{c + \varepsilon}{d} \qquad (6')$$

yang sedikit lebih besar dari pada sebelum ada suatu pengurangan. Sebaliknya, ukuran rata-rata dari populasi pemangsa akan menjadi

$$\bar{y} = \frac{a - \varepsilon}{b} \qquad (7')$$

yang sedikit lebih kecil dari pada sebelum ada pengurangan.

CAMPURAN

🕮 Penyelesaian Air Asin

Persamaan diferensial linear orde satu muncul sebagai model matematik dalam soal-soal laju yang meliputi campuran. Ini akan kita lukisankan oleh suatu contoh khusus.

CONTOH 4 . Sebuah bejana besar berisi 81 galon air yang mengandung 20 pon larutan garam. Air asin yang mengandung 3 pon larutan garam tiap galon, mengalir ke dalam bejana dengan laju 5 galon tiap menit. Campuran yang dipertahankan merata dengan cara mengaduknya, mengalir ke luar dengan kecepatan 2 galon tiap menit. Berapa jumlah garam didalam bejana sesudah 37 menit?

Penyelesaian. Ambil *y(t)* sebagai jumlah garam pada saat *t*, maka *y'(t)* adalah laju perubahan garam di dalam bejana pada saat *t*. Jelaslah,

y'(t) = laju masuk – laju ke luar,

dimana "laju masuk" adalah laju garam yang mengalir ke dalam bejana pada saat *t*, dan "laju ke luar" adalah laju garam yang mengalir ke luar pada saat *t*. Di sini,

laju masuk = 3 lb/gal)(5 gal/men) = 15 lb/men

yaitu, 15 pon garam/menit mengalir ke dalam bejana. Untuk menghitung "laju ke luar", kita harus menghitung Kosentrasi garam pada saat *t*, yaitu, banyaknya garam di dalam tiap galon air asin pada saat *t.*

$$kosentrasi = \frac{pon\ garam\ dalam\ bejana\ pada\ saat\ t}{jumlah\ galon\ air\ a\sin\ dalam\ bejana\ pada\ saat\ t}$$

$$= \frac{y(t)}{81+(5-2)t}$$

kita dapatkan

$$laju\ ke\ luar = \left[\frac{y(t)}{81+3t}\ lb/gal\right](2gal/men) = \frac{2y(t)}{81+3t}\ lb/men$$

Jadi, persamaan diferensial yang meklukiskan soal campuran ini adalah

$$y' = 15 - \frac{2y}{81+3t} \qquad (12)$$

Kita juga mempunyai syarat awal

$$y(0) = 20, \qquad (13)$$

yang menerangkan keadaan pada saat awal, yaitu, pada saat $t = 0$, ada 20 pon garam di dalam bejana. Sekarang kita harus menyelesaikan MNA (12) – (13). Persamaan (12) adalah linear dan dapat dituliskan dalam bentuk

$$y' + \frac{2}{81+3t}y = 15$$

Bila kedua ruas dikalikan dengan

$$eksp(\int \frac{2}{81+3t}dt) = eksp(\frac{2}{3}\int \frac{dt}{27+t}) = eksp\left[\frac{2}{3}\ln(27+t)\right] = (27+t)^{\frac{2}{3}}$$

kita peroleh

$$\left[y(t)(27+t)^{\frac{2}{3}}\right]' = 15(27+t)^{\frac{2}{3}}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas terhadap t, kita peroleh

$$y(t)(27+t)^{\frac{2}{3}} = 15(27+t)^{\frac{2}{3}}.\frac{3}{5} + c$$

maka,

$$y(t) = 9(27 = t) + c(27+t)^{-\frac{2}{3}}$$

Dengan menggunakan syarat (13), kita peroleh

$$20 = 9(27) + c(27)^{-\frac{2}{3}}$$

maka c = -2007. Jadi,

$$y(t) = 9(27+t) - 2007(27+t)^{-\frac{2}{3}}$$

dan jumlah garam sesudah 37 menit adalah

$$y(37) = 9(27+37) - 2007(27+37)^{-\frac{2}{3}} = 450,6\,lb$$

DIFUSI

🕮 Gas Berdifusi

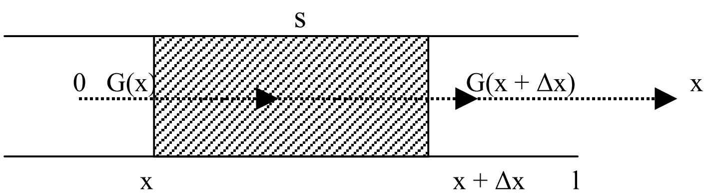
Misalkan bahwa suatu gas berdifusi ke dalam suatu zat cair yang ada di dalam sebuah pipa panjang dan sempit. Misalkan bahwa proses ini berlangsung dalam jangka waktu yang panjang dan bahwa kosentrasi y(x) dari gas di dalam pipa hanya tergantung pada jarak x dari titik awal 0 (dan bebas dari wakltu). Anggaplah bahwa gas bereaksi secara kimia dengan zat cair itu dan bahwa banyaknya H(x) dari gas yang larut oleh reaksi ini berbanding lurus dengan y(x). Yaitu,

$$H(x) = ky(x) \tag{12}$$

Kita ingin menghitung kosentrasi y(x) dari gas di dalam zat cair itu, pada setiap titik x, dari kosentrasi yang diketahui pada titik 0 dan l, yaitu

$$y(0) = A \quad \text{dan} \quad y(l) = 0 \tag{13}$$

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita perhatikan suatu bagian kecil S dari pipa di antara titik x dan $x+\Delta x$ (Gambar 2.2). Jadi jumlah G(x) dari gas yang berdifusi ke dalam S pada titik x dikurangi jumlah $G(x+\Delta x)$ yang berdifusi ke luar dari S pada titik $x+\Delta x$, harus sama dengan jumlah gas yang larut dalam S oleh reaksi kimia. Untuk menghitung G(x) dan $G(x+\Delta x)$, kita gunakan hukum Fick mengenai difusi, yang menyatakan bahwa jumlah gas yang melalui suatu satuan luas dalam tiap satuan waktu berbanding



Gambar 2.2

lurus dengan laju, perubahan kosentrasi. Jadi

$$G(x) = -Dy'(x) \tag{14}$$

Di mana D > 0 adalah koefisien difusi dan tanda negatif memastikan kenyataan bahwa gas berdifusi dari daerah berkosentrasi tinggi ke daerah berkosentrasi rendah. Sama dengan cara diatas,

$$G(x+\Delta x) = -Dy'(x+\Delta x) \tag{15}$$

Persamaan (12) menyatakan jumlah gas yang larut pada titik x yang disebabkan oleh reaksi kimia dari gas dan zat cair. Karena itu, jumlah seluruh gas yang larut oleh reaksi kimia dalam bagian S diberikan oleh

$$\int_{x}^{x+\Delta x} ky(s)ds \tag{16}$$

Jadi,

$$\left[-Dy'(x)\right]-\left[-Dy'(x+\Delta x)\right]=\int_{x}^{x+\Delta x} ky(s)ds \tag{17}$$

FARMOKOLOGI

Takaran Obat

Dalam farmokologi dikenal bahwa penisilin dan banyak obat-obat lain yang diberikan kepada pasien akan lenyap dari tubuh pasien sesuai dengan kaidah sedrehana berikut ini: Jika *y(t)* adalah banyaknya obat di dalam tubuh seseorang pada saat t, maka laju perubahan *y(t)* dari obat itu berbanding lurus dengan banyaknya obat yang ada pada saat *t*. Jadi *y(t)* memenuhi persamaan diferensial terpisah

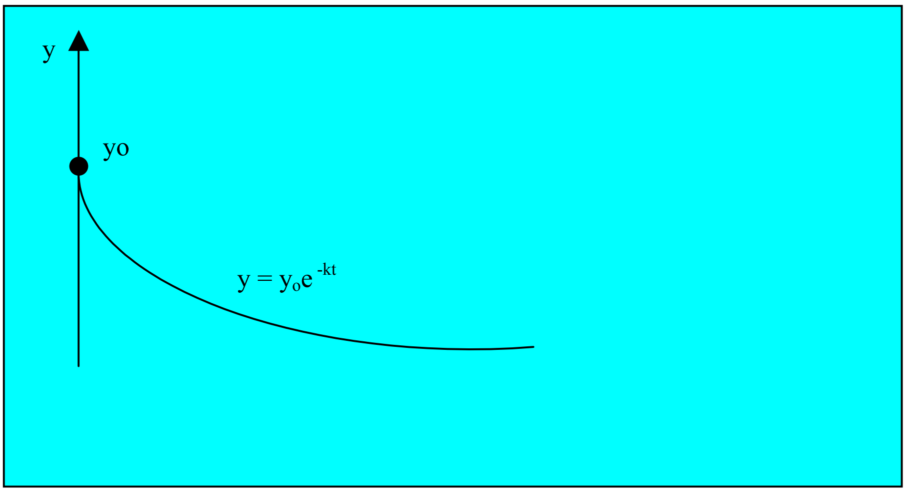
$$y = -ky \tag{8}$$

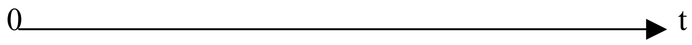
dimana $k > 0$ adalah konstanta perbandingan. Tanda negatif dalam (8) sesuai dengan fakta bahwa *y(t)* berkurang bila *t* bertambah, jadi turunan *y(t)* menurut t adalah negatif. Untuk tiap obat, konstanta k diketahui dari percobaan.

Penyelesai persamaan diferensial (8) adalah (lihat Contoh 3 dari bagian 1.3)

$$y(t) = y_0 e^{-kt} \tag{9}$$

di mana $y_0 = y(0)$ adalah banyaknya obat pada saat permulaan. Seperti kita lihat dari Pers.(9), (lihat juga Gambar 1.2), banyaknya obat di tubuh pasien cenderung menuju nol jika $t \to \infty$. Tetapi dalam banyak hal





GAMBAR 1.2

Perlu kosentrasi obat dipertahankan konstan (dan karenanya mendekati suatu jumlah yang tetap) di dalam tubuh pasien untuk waktu lama. Untuk mencapai ini, kepada pasien perlu diberi obat awal dengan takaran tambahan y_0 dan pada selang waktu yang sama, katakan tiap τ jam, pasien diberi obat dengan takaran *D*. Persamaan (9) menunjukkan jumlah obat yang ada pada setiap saat *t*; karenanya mudah untuk menentukan besarnya takaran *D*. Jadi, pada saat τ , sebelum kita mengatur takaran *D*, banyaknya obat yang ada pada tubuh manusia adalah

$$y(\tau) = y_0 e^{-kt}$$

Jika kita ingin mempertahankan jumlah awal obat dalam tubuh manusia sebesar y_0 pada $\tau, 2\tau, 3\tau, \ldots,$ takaran *D* harus memenuhi persamaan

$$y_0 e^{-kt} + D = y_0$$

Jadi, takaran obat yang diinginkan diberikan oleh persamaan

$$D = y_0 (1 - e^{-kt}) \qquad (10)$$

GEOMETRI

Trayektori Ortogonal

Perhatikan sistem lengkungan (kurva) satu parameter

$$F(x, y) = c \qquad (15)$$

Dengan menurunkan pers. (15), kita peroleh

$$F_x dx + F_y dy = 0$$

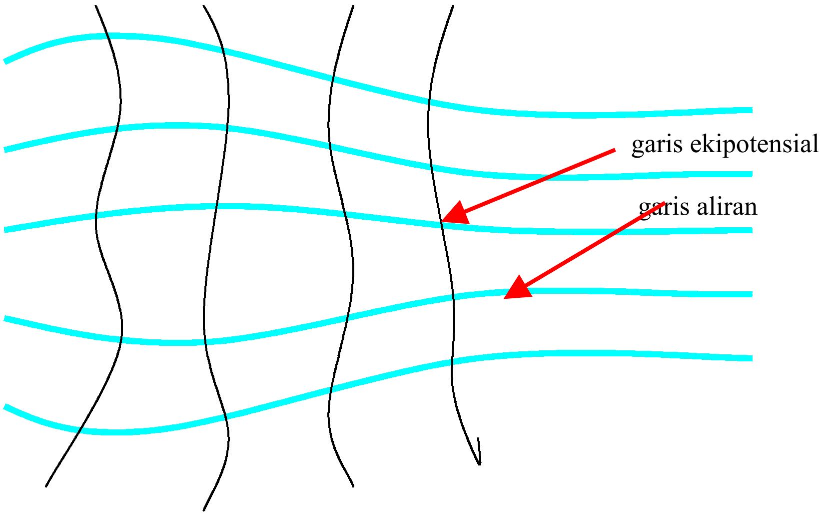
Di mana F_x dan F_y masing-masing adalah turunan parsial menurut *x* dan *y*. Jadi

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \qquad (16)$$

memberikan kemiringan tiap lengkungan sistem (15). Kita ingin mendapatkan sistem lengkungan lain yang tiap anggotanya memotong tegaklurus tiap anggota sistem (15), yaitu, kita ingin mendapatkan *trayektori ortogonal* dari sistem (15). Mengingat Pers.(16), kemiringan trayektori ortogonal dari sistem (15) adalah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} \tag{17}$$

Penyelesai umum Pers.(17) menghasilkan trayektori ortogonal dari sistem (15)



GAMBAR 1.4

Ada banyak penafsiran dan penggunaan trayek.... ortogonal di fisika :

1. Dalam *medan elektrostatik garis-garis gaya tegak lurus pada garis-garis potensial yang konstan*
2. Dalam *aliran dua dimensi fluida* garis-garis gerak aliran – disebut *garis-garis arus* – tegak lurus pada *garis ekipotensial* dari aliran (lihat Gambar 1.4)
3. Dalam *meteorologi* trayektori dari *isobar* (lengkungan (kurva) penghubung semua titik yang mencatat tekanan barometer yang sama) memberikan arah angin dari tekanan tinggi ke rendah.

Hanya beberapa dari banyak penerapan persamaan diferensial biasa yang kita berikan. Lainnya banyak yang dikembangkan secara terperinci dalam bagian selanjutnya. Sebagai tambahan, kita sajikan dalam latihan sejumlah penerapan. Disini ditekankan dua hal; pertama, agar pembaca terbuka pada aneka ragam persamaan diferensial yang dimasukkan, dan kedua, untuk mempertajam kemampuan dalam menyelesaikan fakta banyak persamaan diferensial tidak dibuat oleh daya khayal pengajar melainkan oleh model kejadian kehidupan nyata

KEDOKTERAN

🕮 Kekebalan Tertentu

Penyakit-penyakit tertentu yang menyerang orang-orang dapat dianggap membangkitkan kekebalan hidupnya. Yaitu, seseorang yang sudah pernah menderita penyakit dan selamat, terhindar dari penyakit itu untuk selamanya.

Inilah kejadian yang sesungguhnya (atau keadaan yang sangat dekat dengan sesungguhnya, karena selalu ada kekecualian-kekecualian dalam hal ini) untuk penyakit-penyakit yang umum seperti campak, gondong, dan cacar air, maupun cacar yang sekarang diduga telah dapat dibasmi sama sekali.

Dalam mencoba meramal penyakit semacam itu, kita perhatika satu kelompok umur, yaitu semua orang yang lahir pada satu tahun tertentu, dan menentukan $N(t)$ sebagai jumlah orang yang selamat sampai umur t, dan $S(t)$ jumlah orang yang belum pernah terserang penyakit itu dan tetap mudah terserang penyakit itu pada umur t.

Jika p adalah peluang kemudahan orang mendapat penyakit itu ($0 < p < !$), adalah perbandingan dari orang yang meninggal karena penyakit itu, maka hubungan berikut dapat diturunkan :

$$dS(t)/dt = - pS(t) + (S(t)/N(t))dN(t)/dt + pS^2(t)/mN(t). \qquad (19)$$

Persamaan ini pertama-pertama diturunkan oleh Daniel Bernoulli (dalam 1760) pada waktu menyelidiki pengaruh cacar. Persamaan itu sebenarnya tidak sehebat seperti kelihatanya. Jika kita kalikan kedua ruas oleh N/S^2 dan suku-sukunya dikelompokkan, kita peroleh

$$(1/S)dN/dt - (N/S^2)dS/dt = pN/S - p/m \qquad (20)$$

Ingatkan bahwa $(d/dt)(N/S) = (1/S)dN/dt - (N/S^2)dS/dt$, dan subsitusikan ke dalam ruas kiri dari persamaan terakhir itu, untuk mendapat

$$d(N/S)/dt = pN/S - p/m$$

Karena N/S timbul sebagai peubah, tentukan $y = N/S$ dan tuliskan kembali persamaan itu sebagai

$$dy/dt = py - p/m \qquad (21)$$

Persamaan (21) adalah suatu persamaan diferensial peubah terpisah, jadi kita dapat menuliskan hubungan berikut untuk penyelesaiannya :

$$\int_0^a \frac{dy/dt}{py - p/m} dt = a$$

Atau

$$\int_{y(0)}^{y(a)} \frac{dy}{py - p/m} = a$$

Jadi,

$$\frac{1}{p}\log\left|\frac{y(a)-1/m}{y(0)-1/m}\right| = a$$

Dari ini kita dapatkan

$$\frac{y(a)-1/m}{y(0)-1/m} = e^{ap}$$

Dengan menyelesaikan *my(a)*, kita peroleh

$$my(a) = 1 + (my(0) - 1)\, e^{ap} \qquad (22)$$

Karena pada waktu lahir, setiap anggota kelompok umur itu mudah terserang penyakit, $S(0) = N(0)$, menghasilkan $y(0) = 1$. Sekarang persamaan (22) menjadi $my(a) = 1 + (m - 1)\, e^{ap}$. Akhirnya, dengan mengingat kembali bahwa $y(a) = N(a)/S(a)$, kita peroleh

$$S(a) = mN(a)/\left[1 + (m-1)\, e^{ap}\right] \qquad (23)$$

Pernyataan ini menghasilkan banyaknya orang yang mudah terserang penyakit, dinyatakan dalam banyaknya orang yang selamat sampai umur a dari kelompok umur itu, dan dua konstanta dasar *m* dan *p*. Nilai-nilai parameter diruas kanan persaman itu dapat ditentukan dari laporan sensus dan statistik mengenai penyakit.

CONTOH 5. Dengan menggunakan data yang ada padanya, Bernoulli menaksirkan p = 1/8 dan *m* = 8 untuk penyakit cacar di Paris dalam tahun 1760. Dengan menggunkana konstanta-konstanta itu dalam Pers.(23), di antara kelompok umur, jumlah orang yang mudah terserang penyakit pada umur *a*, dari *N(a)* yang selamat adalah

$$S(a) = 8N(a)/(1 + 7e^{a/8})$$

Jadi, pada umur 24 (a = 24), $S(a)/N(a)$ kira-kira sama dengan 0,056. Dengan perkataan lain, hanya satu dari kira-kira delapan belas orang berumur 24 tahun akan terhindar dari cacar.

CATATAN 1. Persamaan (23) diturunkan berdasar atas hubungan (19) yang masuk akal dan tentu saja tidak sembarangan,. Untuk melihat bahwa (19) masuk akal, akan kita periksa apa maksud suku-sukunya. $dS(t)/dt$ di ruas kiri, adalah laju perubahan (penurunan) banyaknya orang yang mudah terserang penyakit. Suku-suku di ruas kanan dapat dikumpulkan menjadi dua kelompok. Pertama, $pS(t)$, adalah laju orang-orang yang kita harapkan pada umur *t* peka terhadap serangan penyakit itu. Termasuk dalam suku ini adalah orang-orang yang akan ,meninggal karena penyakit itu. Sekarang kita perlu suatu pernyataan untuk laju pemusnahan orang yang mudah terserang penyakit, yang meninggal karena sebab lain. Ini diberikan oleh kelompok kedua dari suku-suku $\left[dN(t)/dt + pS(t)/m\right] S(t)/N(t)$, di mana *dN(t)/dt* adalah laju perubahan dari semua kelompok umur itu, yang meninggal karena semua alasan, *pS(t)* adalah laju kematian karena penyakit khusus, dan *S(t)/N(t)* adalah perbandingan dari orang yang mudah terserang penyakit diantara kelompok umur. Jadi, $[dN(t)/dt + pS(t)/m]\, S(t)/N(t)$ adalah memang laju penyusutan orang yang mudah terserang penyakit, yang mati karena lasan lain selain penyakit itu. Dengan demikian Pers.(19) adalah suatu persamaan antara dua cara yang berbeda dari pernyataan laju perubahan banyaknya orang yang mudah terserang penyakit.

Semua anggapan yang menuntun terbentuknya Pers.(19) dapat diterima pada taraf intuisi dan menuntun terbentuknya matematik, atau model matematik, dari keadaan yang kita periksa. Sekali kita peroleh Pers. (19), kita dapat menggunakan persamaan diferensial itu untuk mendapatkan hubungan (23).

Ada hal-hal khusus di mana kita mempunyai dugaan yang dapat diterima untuk pecahan *S(a)/N(a)*, dan kita akan meyakinkan bahwa (23) memenuhi dugaan-dugaan itu. Misalnya, jika laju kematian karena penyakit sangat tinggi $(m \to 1)$, kita dapat menduga bahwa hampir semua orang yang selamat *N(a)* juga mudah terserang penyakit (yaitu, hanya orang-orang yang belum pernah mendapat penyakit itu yang dapat bertahan hidup). Di sini kita akan menduga bahwa $S(a)/N(a) \to 1$, jika $(m \to 1)$. Sebaliknya dalam keadaan angka kematian yang rendah, kita dapat dengan mudah memastikan bahwa $S(a) / M(a) = e^{-ap}$. Apakah oini yang anda duga dalam kasus ini?

KEUANGAN

🕮 Investasi

Uang sejumlah $ 5000 diinvestasikan dengan bunga 8 % tiap tahun, bertambah secara kontinu. Berapa jumlah uang itu sesudah 25 tahun?

Penyelesaian. Ambil *y(t)* sebagai jumlah uang (modal tambah bunga) pada saat *t*. Maka laju pertambahan perubahan jumlah uang pada sat *t* diberikan oleh

$$\frac{dy}{dt} = \frac{8}{100} y \qquad (9)$$

Jelaslah bahwa persamaan (9) adalah persamaan diferensial terpisah. Penyelesaiannya (menurut Contoh 3) adalah

$$y(t) = y(0)e^{(8/100)\,t}$$

Karena *y(0)* = 5000 (modal awal), kita perolehlah

$$y(25) = 5000e^{(8/100)\,25} = 5000e^{2} = \$36{,}945.28$$

KIMIA

Difusi antara dua ruang

Andaikan ada dua ruang A_1 dan A_2 masing-masing bervolume V_1 dan V_2, dan dipisahkan oleh suatu dinding penghalang. Melalui dinding penghalang dapat terjadi suatu difusi larutan dari ruang yang berkosentrasi lebih tinggi ke ruang yang berkosentrasi kedua ruang, yaitu, $c_1 - c_2$. Tentukan kosentrasi dalam tiap ruang pada setiap saat t.

Penyelesaian. Ambil $y_1(t)$ dan $y_2(t)$ masing-masing sebagai jumlah larutan yang ada dalam ruang A_1 dan A_2 pada saat t, maka

$$c_1(t) = \frac{y_1(t)}{V_1} \quad dan \quad c_2(t) = \frac{y_2(t)}{V_2}$$

berturut-turut adalah kosentrasi ruang A_1 dan A_2. Persamaan diferensial yang melukiskan difusi itu adalah

$$y_1(t) = k(c_2 - c_1) \qquad \text{dan} \qquad y_2(t) = k(c_1 - c_2)$$

di mana k adalah konstanta perbandingan ($k > 0$). Bila dibagi dengan volume ruang, kita peroleh

$$c_1 = \frac{k}{V_1}(c_2 - c_1) \qquad dan \quad c_2 = \frac{k}{V_2}(c_1 - c_2) = -\frac{y_1}{V_2} = \frac{V_1}{V_2}c_1$$

Dengan menurunkan kedua ruas persamaan pertama dengan menggunakan persamaan kedua, kita dapatkan bahwa

$$c_1 = \frac{k}{V_1}(c_2 - c_1) = -k\,(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})c_1$$

atau

$$c_1 + k(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2})c_1 = 0$$

Persamaan (11) adalah persamaan diferensial dari bentuk A dan dapat direduksi menjadi persamaan orde satu. Kita tinggalkan perhitungan yang terperinci untuk Latihan 5, 6, dan 7.

MATEMATIKA FISIKA

Persamaan Legendre

Persamaan diferensial

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + p\,(p+1)\,y = 0 \tag{25}$$

di mana p suatu konstanta, disebut persamaan Legendre,. Penyelesaian (25) sangat penting dalam banyak cabang matematik terapan. Sebagai contoh, persamaan Legebdre muncul dalam kajian persamaan potensial dalam koordinat bola. Jelaslah, persamaan potensial

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

dipetakan ke koordinat bola

$$x = r\sin\theta\ \cos\phi\,, \qquad y = r\sin\theta\ \sin\phi, \qquad z = \ \cos\theta$$

menjadi

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\cot\theta\ \partial V}{r^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$

Jika kita tertarik pada penyelesaian yang bebas dari θ berbentuk V = $r^p\theta$, dimana θ merupakan fungsi dari θ saja, kita dapatkan

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\ \frac{d\Theta}{d\theta} + p(p+1)\Theta = 0$$

Dengan menggunakan penggantian peubah x = $\cos\theta$ dan mengganti θ dengan y, kita peroleh persamaan Legendre (25).

Jika p bilangan bulat taknegatif, salah satu penyelesaian dari Persamaan (25) di sekitar titik biasa $x_0 = 0$ berbentuk polinom. Bila dinormalkan secara tepat (seperti yang akan kita jelaskan di bawah in), penyelesaian berbentuk polinom Legendre.